Barem clasa a V-a

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	a)
3.	b)
4.	b)
5.	c)
6.	e)
7.	~~b)~~ PUNCTAJ MAXIM
8	d)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Într-o urnă sunt 7 bile pe care sunt scrise numerele 2, 5, 7, 9, 13 , 16 şi 78. Extragem din urnă, la întâmplare, 6 din cele 7 bile şi constatăm că suma primelor 3 este de 4 ori mai mică decât suma ultimelor 3. Ce număr este scris pe bila rămasă în urnă?

Notăm $b_1, b_2, ..., b_7$ cele 7 bile.

Avem $(b_1 + b_2 + b_3) \cdot 4 = b_4 + b_5 + b_6$ 5p

$(b_1 + b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6) + b_7 = 2+5+7+9+13+16+78 = 130$ 5p

$5 \cdot (b_1 + b_2 + b_3) + b_7 = 130$ 5p

Rezultă b_7 este divizibil cu 5 .... 10p

Obţinem că $b_7 = 5$. Deci, numărul 5 este scris pe bila rămasă în urnă 5p

Barem clasa a VI-a

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	a)
2.	c)
3.	b)
4.	d)
5.	e)
6.	e)
7.	c)
8	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Într-un regat sunt 2009 oraşe. Regele a poruncit să se realizeze drumuri între oraşe astfel încât din fiecare oraş să pornească exact cinci drumuri. Au putut supuşii să îndeplinească ordinul regelui? Justificaţi răspunsul.

Fiecare drum leagă două oraşe. Asta înseamnă că atunci când numărăm toate drumurile, fiecare drum este numărat de două ori (o dată din fiecare capăt) 10p

Avem în total $2009 \cdot 5 = 10045$ capete de drumuri 5p

Dar dacă fiecare drum este numărat de două ori, atunci totalul trebuie să fie număr par, iar 10045 este număr impar 10p

Deci, nu, supuşii nu au putut îndeplini ordinul regelui 5p

Barem clasa a VII-a

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	d)
2.	d)
3.	c)
4.	e)
5.	b)
6.	a)
7.	e)
8	a)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Fie ABC un triunghi oarecare. Poate fi împărţit acest triunghi în 16384 de triunghiuri congruente? Justificaţi.

Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC 5p

Obținem Δ APN $\equiv$ Δ BPM $\equiv$ Δ CMN $\equiv$ Δ PMN (L.L.L.) 5p

Prin acelaşi procedeu fiecare din cele 4 triunghiuri se va împărți în câte alte 4 triunghiuri congruente 5p

Se obțin 4^2 triunghiuri congruente 5p

Fiecare din cele 4^2 triunghiuri congruente se va împărți în câte 4 triunghiuri congruente şi obținem 4^3 triunghiuri congruente 5p

Procedeul se continuă până obținem $4^7 = 16384$ triunghiuri congruente 5p

Barem clasa a VIII-a

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	e)
2.	d)
3.	c)
4.	b)
5.	c)
6.	d)
7.	a)
8	d)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Un cub cu muchia de 10 cm este vopsit în galben şi apoi împărțit în cuburi mai mici cu muchia de 1 cm.

a) Câte cuburi mici au trei fețe colorate?

b) Câte cuburi mici au numai două fețe colorate?

c) Câte cuburi mici nu au nicio față colorată?

a) Cuburile mici cu trei fețe colorate sunt colțurile cubului mare **5p**
Un cub are 8 colțuri $\Longrightarrow$ sunt 8 cuburi mici cu 3 fețe colorate **5p**

b) Cuburile mici cu numai două fețe colorate se află pe muchii, dar nu la colțuri.
O muchie are 10 cuburi mici, scoatem cele 2 colțuri, rămân 8 cuburi pe fiecare muchie
.... **5p**
Cubul are 12 muchii $\Longrightarrow 12 \cdot 8 = 96$ cuburi **5p**

c) Cuburile mici care nu au nicio față colorată sunt complet în interior.................... **2p**
Eliminăm stratul exterior, rămâne un cub cu muchia $10 - 2 = 8$ cm **3p**
$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ cuburi **5p**

Barem clasa a IX-a Uman

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	a)
3.	d)
4.	b)
5.	b)
6.	c)
7.	b)
8	b)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Philippe a folosit n^3 ($n > 2$) cubulețe mici identice pentru a construi un cub mare și a vopsit întreaga suprafață exterioară a acestuia. Numărul de cubulețe cu o singură față vopsită este egal cu numărul cubulețelor cu toate fețele nevopsite. Care este valoarea numărului n?

Barem:

Cubulețele cu o față vopsită sunt pe fețele mari, dar nu pe muchii sau colțuri, adică $6(n-2)^2$..10p

Cubulețele cu toate fețele nevopsite sunt cele din interior, adică $(n-2)^3$ 10p

Avem $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ 5p

$n > 2 \Longrightarrow (n-2)^2 \neq 0 \Longrightarrow 6 = n - 2$ 3p

Obținem $n = 8$ 2p

Barem clasa a IX-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	a)
3.	e)
4.	c)
5.	b)
6.	c)
7.	c)
8	a)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Se consideră un poligon regulat cu nouă laturi. Dacă latura poligonului are lungimea de 1 cm, să se determine diferența dintre lungimea celei mai lungi diagonale și lungimea celei mai scurte diagonale a poligonului.

Soluție: Fie poligonul regulat cu 9 laturi notat ABCDEFGHI.

Considerăm diagonalele care pornesc din vârful A. Cele mai lungi diagonale sunt AE și AF, iar cele mai scurte AC și AH..2p

Trebuie să calculăm diferența dintre AE și AC. Măsura unghiurilor poligonului este

$\frac{n-2}{n} \cdot 180^0$, deci $\widehat{ABC} = \frac{9-2}{9} \cdot 180^0 = 140^0$ 3p

$m(AB) = m(BC) = \cdots = m(IA) = \frac{360^0}{9} = 40^0$ 3p

$\widehat{EAB} = \widehat{DEA} = 60^0$ (le corespund arce egale, respectiv 120^0)

În Δ ABC isoscel, avem $\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = 20^0$, dar $\widehat{BCA} = 20^0$ (corespunde arcului

CD = 40^0) $\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAD}$ alterne interne $\Rightarrow$ BC ∥ AD 5p

Luăm punctul $M \in [AE]$ $a.\hat{\imath}.\, AC \equiv AM \Rightarrow \widehat{ACM} = 70^0$ 5p

$\Rightarrow \widehat{MCB} = 90^0 \Rightarrow MC \perp BC \Rightarrow MC \perp AD$ 5p

Deci AD este mediatoarea lui [CM] $\Rightarrow \Delta$ CMD isoscel $\widehat{DCM} = \widehat{DMC} = 140^0 - 90^0 = 50^0 \Rightarrow \widehat{CDM} = 80^0 \Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{DEM} = 60^0 \Rightarrow \Delta$ DEM echilateral cu ME = 1 cm.....5p

Dar AE – AC = AE – AM = ME = 1 cm 2p

Barem clasa a X-a Uman

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	a)
2.	d)
3.	d)
4.	b)
5.	e)
6.	e)
7.	b)
8	c)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

a) Un bijutier are trei piese din aur de formă circulară şi de diametre diferite. Cele trei diametre sunt: 6 cm, 8 cm şi 10 cm. Grosimea pieselor este aceea şi la toate cele trei piese. Cum poate împărți în patru părți egale în greutate cele trei piese, fără să le topească sau să le cântărească (doar prin măsurare şi tăiere)? Justificați.

b) Doru şi Remus construiesc un mozaic pătrat din plăci de gresie pătrate identice. Remus pune o placă neagră în centru. Doru pune 8 plăci albe în jurul ei, formând un al doilea pătrat. Remus pune 16 plăci negre în jurul acestora, formând al treilea pătrat. De câte plăci are nevoie Remus pentru a completa cel de-al unsprezecelea pătrat? Câte plăci a pus Doru dacă în total au fost 20 de pătrate?

Soluție:

a) Se observă ca diametrele pieselor sunt dimensiunile unui triunghi dreptunghic 5p

Prin urmare, greutatea piesei mai mari este echivalentă cu suma greutăților celorlalte două piese 5p

Bijutierul taie fiecare piesă în jumătate, formează câte o jumătate din cercul mic cu o jumătate din cercul mijlociu, iar jumătățile cercului mare formează celelalte două părți 5p

b) Începând cu al doilea pătrat se formează o progresie aritmetică cu rația 8 (plăci) 5p

Pentru cel de-al 11-lea pătrat Remus are nevoie de $(11-1) \cdot 8 = 80$ plăci 5p

Doru a pus $8 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + ... + 8 \cdot 19 = 800$ plăci 5p

Barem clasa a X-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	d)
2.	c)
3.	d)
4.	b)
5.	e)
6.	c)
7.	e)
8	b)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Să se arate că tg $2017^0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soluție:

Avem $tg\,(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tga\,tgb}$, $tg\,(a-b) = \frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$, $tg\,(2a) = \frac{2tga}{1-(tga)^2}$

Dacă $tga \in \mathbb{Q}$ și $tgb \in \mathbb{Q}$, atunci $tg(a+b) \in \mathbb{Q}$, $tg(a-b) \in \mathbb{Q}$ $tg(2a) \in \mathbb{Q}$....................................5p

Perioada tangentei este 180^0, deci $tg\,2017^0 = tg\,(11 \cdot 180^0 + 37^0) = tg\,37^0$.......................... 5p

Presupunem că $tg37^0 \in \mathbb{Q}$. Din $tg37^0 \in \mathbb{Q}$ și $tg45^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow tg(45^0 - 37^0) = tg8^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow tg2 \cdot 8^0 = tg\,16^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow tg2 \cdot 16^0 = tg\,32^0 \in \mathbb{Q}$ 10p

Din $tg37^0 \in \mathbb{Q}$ și $tg32^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow tg(37^0 - 32^0) = tg5^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow tg2 \cdot 5^0 = tg\,10^0 \in \mathbb{Q}$ 5p

Din $tg10^0 \in \mathbb{Q}$ și $tg5^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow tg(10^0 + 5^0) = tg15^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow tg2 \cdot 15^0 = tg\,30^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow tg2 \cdot 30^0 = tg\,60^0 \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ fals $\Longrightarrow tg\,2017^0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.......5p

Barem clasa a XI-a Uman

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	a)
2.	c)
3.	b)
4.	e)
5.	d)
6.	a)
7.	b)
8	c)

Partea a II-a (30 puncte)
Problema 9

Un sondaj realizat pe un eşantion de 50 de persoane arată preferinţele pentru tipuri de muzică:

Pop: 20 persoane

Rock: 15 persoane

Hip-hop: 10 persoane

Clasică: 5 persoane

a) Construiţi un tabel de frecvenţe relative
b) Reprezentaţi datele printr-o diagramă circulară (procente)
c) Interpretaţi rezultatele sondajului în 3-4 rânduri.

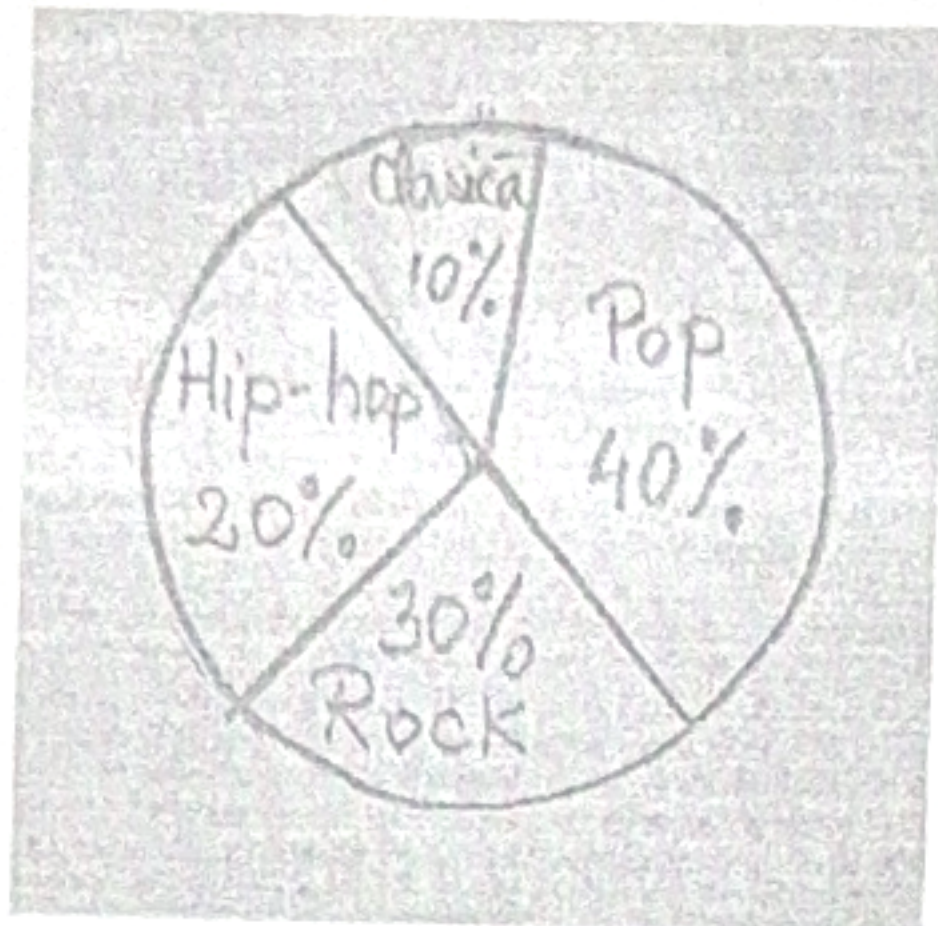
Soluţie:

a) Total persoane: 50

Gen muzical	**Persoane**	**Frecvenţa relativă**
Pop	20	$\frac{20}{50} = 0,4$
Rock	15	$\frac{15}{50} = 0,3$
Hip-hop	10	$\frac{10}{50} = 0,2$
Clasică	5	$\frac{5}{50} = 0,1$

-- 10p

b) Pop: 40%, Rock: 30%, Hip-hop: 20%, Clasică: 10%



— . 10 p.

c) Sondajul indică faptul că muzica Pop este cea mai populară în grupul studiat, fiind preferată de 40% din respondenți. La polul opus, muzica clasică ocupă ultimul loc, fiind ascultată de doar 10% din respondenți. Aşadar, se observă o orientare către genurile moderne, ele cumulând 90% din totalul opțiunilor. — . . 10 p.

Barem clasa a XI-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	c)
2.	d)
3.	c)
4.	c)
5.	b)
6.	c)
7.	a)
8	a)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Fie două matrice A, B $\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A-B)^2 = O_2$.

a) Arătați că $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$.

b) Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow \det A = \det B$.

Soluție:

a) Din $(A-B)^2 = O_2$ obținem det (A – B) = 0 ....2p

De asemenea, deducem că Tr (A – B) = 0, deci Tr A = Tr B = a 4p

Notăm b = detA – detB. Conform relației lui Cayley, avem

$\begin{cases} A^2 - aA + detA \cdot I_2 = O_2 \\ B^2 - aB + detB \cdot I_2 = O_2 \end{cases}$, de unde 4p

$\det(A^2 - B^2) = \det(a(A-B) - bI_2)$. 3p

Dar $\det(a(A-B) - bI_2) = a^2 \det(A-B) - ab\, Tr\,(A-B) + b^2 = b^2$

Rezultă $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$..2p

b) Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$f(x) = \det\big(A^2 - B^2 + x(AB - BA)\big), x \in \mathbb{R}$ 3p

Funcția f se poate reprezenta sub forma $f(x) = \det(A^2 - B^2) + cx + \det(AB - BA) \cdot x^2$,

$x \in \mathbb{R}$, unde c este o constantă reală 5p

Din $f(1) = f(-1) = \det(A-B) \cdot \det(A+B) = 0$, obținem c = 0 și

$\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA) = 0$ 5p

Atunci, conform a), $(\det A - \det B)^2 = -\det(AB - BA)$, de unde concluzia 2p

Barem clasa a XII-a Real

Se acordă **10 p** din oficiu

Partea I (60 puncte) Se acordă **7,5 p** pentru fiecare răspuns corect

1.	b)
2.	d)
3.	b)
4.	b)
5.	a)
6.	c)
7.	d)
8	b)

Partea a II-a (30 puncte)

Problema 9

Pe M = (0; ∞) se consideră o lege de compoziție "∗" care are următoarele proprietăți:

i) $(x * y) \cdot (x * z) = x * (y + z), \forall x, y, z \in M$

ii) $x * 1 = x, \forall x \in M$.

Arătați că: a) $2 * 4 \in \mathbb{Q}$

b) $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$

c) $\sqrt{2022} * 2022 = 2022^{1011}$

Soluție:

a) Dacă $y = z = 1 \Rightarrow (x * 1) \cdot (x * 1) = x * 2 \Rightarrow x^2 = x * 2, \forall x \in M$.................... 4p

Dacă $y = z = 2 \Rightarrow (x * 2) \cdot (x * 2) = x * 4 \Rightarrow (x * 2)^2 = x * 4 \Rightarrow$

$x^4 = x * 4, \forall x \in M$...4p

Deci pentru $x = 2 \Rightarrow 2 * 4 = 16 \in \mathbb{Q}$ 2p

b) Dacă $y = z = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{2}\right)^2 = x * 1 = x, \forall x \in M$.. 4p

Dacă $y = z = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{4}\right)^2 = x * \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x * \frac{1}{4}\right)^4 = \left(x * \frac{1}{2}\right)^2 = x, \forall x \in M$....... 4p

Pentru $x = 4$ obținem $\left(4 * \frac{1}{4}\right)^4 = 4 \Rightarrow \left(4 * \frac{1}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow 4 * \frac{1}{4} = \sqrt{2}$ deoarece

$4 * \frac{1}{4} \in M$. Deci $4 * \frac{1}{4} \notin \mathbb{Q}$ 2p

c) Avem $(x * 1)^2 = x * 2 \Rightarrow x^2 = x * 2, \forall x \in M$

Pentru $y = 1$ şi $z = 2$ obținem $(x * 1) \cdot (x * 2) = x * 3, \forall x \in M \Longrightarrow$

$x^3 = x * 3, \forall x \in M$ 3p

Presupunem că $x^k = x * k, \forall x \in M$ şi demonstrăm că $x^{k+1} = x * (k + 1), \forall x \in M$

$(x * 1) \cdot (x * k) = x * (k + 1) \Longrightarrow x \cdot x^k = x * (k + 1), \forall x \in M \Longrightarrow$

$x^{k+1} = x * (k + 1), \forall x \in M \Longrightarrow x^n = x * n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 6p

Pentru $x = \sqrt{2022}$ şi $n = 2022 \Longrightarrow \sqrt{2022}^{2022} = \sqrt{2022} * 2022$

$\Longrightarrow \sqrt{2022} * 2022 = 2022^{1011}$ 1p